

Halkalar, Modüller ve Yapı Teoremleri  
Kadın Matematikçiler Derneği Lisansüstü Yaz Okulu IX  
23 Haziran-3 Temmuz 2026

Pınar Aydoğdu

Gün	Konu
1	Modüller, altmodüller, faktör modüller, basit modüller
2	Homomorfizmalar, izomorfizma teoremleri, direkt toplamlar, Schur Lemması
3	Serbest modüller ve örnekler
4	Socle ve yarıbasit modüller
5	Artin ve Noether modüller, sonlu uzunluk
6	Yarıbasit halkalar, minimal (sağ) idealler, eşkareler
7	İlkel eşkareler, $eRe$ halkası, matris halkaları
8	Jacobson radikali ve $R/J(R)$ halkası
9	Wedderburn–Artin Teoremi
10	Sonlu boyutlu cebirler, örnekler ve kapanış

## Birinci Gün

Bu dersin amacı modül kavramını tanıtmak ve modüllerin vektör uzaylarının doğal bir genellemesi olduğunu göstermektir. Bu yaz okulunun genel hedefi, basit modüllerden başlayarak yarıbasit modüllere ve sonunda Wedderburn–Artin Teoremi’ne ulaşmaktır.

Basit Modüller  $\rightarrow$  YarıBasit Modüller  $\rightarrow$  Artinian Halkalar  $\rightarrow$  Wedderburn–Artin Teoremi

## 1 Vektör Uzaylarından Modüllere

Bir vektör uzayında skalerler bir cisimden gelir. Modül kavramında ise skalerlerin bir cisimden gelmesini istemeyiz; skalerler daha genel olarak bir halkadan gelir. Bu nedenle modüller, vektör uzaylarının halka teorisindeki doğal genellemesidir.

Vektör uzaylarında doğru olan hangi özellikler modüller için de doğrudur? Hangi özellikler artık doğru değildir?

Bu soru modül teorisinin temel motivasyonlarından biridir.

Dersimiz boyunca halkaların birimli olduğunu varsayacağız.

**Tanım 1.1.**  $R$  bir halka olsun. Bir  $M$  abel grubu üzerinde

$$M \times R \longrightarrow M, \quad (m, r) \longmapsto mr$$

şeklinde bir işlem tanımlı olsun.

Aşağıdaki koşullar her  $m, n \in M$  ve her  $r, s \in R$  için sağlanıyorsa  $M$ 'ye bir *sağ  $R$ -modül* denir:

1.  $(m + n)r = mr + nr$ ,

2.  $m(r + s) = mr + ms$ ,
3.  $(mr)s = m(rs)$ ,
4.  $m1_R = m$ .

Sağ modüllerde skalerler sağdan etki eder. Bu nedenle modül genellikle  $M_R$  şeklinde yazılır. Benzer şekilde sol modüller de tanımlanabilir.

**Tanım 1.2.**  $R$  bir halka olsun. Bir  $M$  abelyen grubu üzerinde

$$R \times M \longrightarrow M, \quad (r, m) \longmapsto rm$$

şeklinde bir işlem tanımlı olsun.

Aşağıdaki koşullar her  $m, n \in M$  ve her  $r, s \in R$  için sağlanıyorsa  $M$ 'ye bir *sol  $R$ -modül* denir:

1.  $r(m + n) = rm + rn$ ,
2.  $(r + s)m = rm + sm$ ,
3.  $r(sm) = (rs)m$ ,
4.  $1_R m = m$ .

**Not 1.3.** Eğer  $R$  değişmeli bir halka ise sağ ve sol modül ayrımı çoğu durumda ortadan kalkar. Ancak genel halka teorisinde  $R$  değişmeli olmak zorunda değildir. Bu yüzden sağ ve sol modülleri ayırmak gerekir.

## 2 Temel Örnekler

**Örnek 2.1** (Vektör Uzayları).  $F$  bir cisim ve  $V$  bir  $F$ -vektör uzayı olsun. Vektör uzayı aksiyomları tam olarak  $V$ 'nin bir  $F$ -modül olması anlamına gelir. Dolayısıyla her vektör uzayı bir modüldür. Ancak her modül bir vektör uzayı değildir; çünkü modüllerde skalerler bir cisimden değil, daha genel bir halkadan gelir.

**Örnek 2.2** (Abelyen Gruplar ve  $\mathbb{Z}$ -Modüller).  $A$  bir abelyen grup olsun.

Her  $a \in A$  ve  $n \in \mathbb{Z}$  için

$$na = \begin{cases} a + \cdots + a & (n > 0), \\ 0 & (n = 0), \\ (-a) + \cdots + (-a) & (n < 0) \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu işlem ile  $A$  bir  $\mathbb{Z}$ -modül olur. Dolayısıyla, her abelyen grup doğal olarak bir  $\mathbb{Z}$ -modüldür. Tersine, her  $\mathbb{Z}$ -modülün altında yatan toplamsal yapı bir abelyen gruptur. Bu nedenle

$$\boxed{\text{Abelyen Gruplar} = \mathbb{Z}\text{-Modüller}}$$

eşitliği geçerlidir.

**Not 2.3.** Grup teorisinde çalıştığımız birçok nesne aslında  $\mathbb{Z}$ -modül olarak da düşünülebilir. Bu yüzden modül teorisi, abelyen grup teorisinin doğal bir genellemesi olarak görülebilir.

**Örnek 2.4** (Bir Halkanın Kendi Üzerindeki Modül Yapısı).  $R$  bir halka olsun.  $R$  kendi üzerinde sağ modül olarak düşünülebilir. Skaler çarpımı

$$a \cdot r := ar$$

şeklinde tanımlanır. Burada sağ taraftaki çarpım halka çarpımıdır.

Bu modül  $R_R$  ile gösterilir.

Benzer şekilde

$$r \cdot a := ra$$

tanımıyla  $R$  bir sol modül de olur ve  ${}_R R$  ile gösterilir.

**Örnek 2.5.** ( $F[x]$  Üzerinde Modüller)  $V$  bir  $F$ -vektör uzayı ve

$$T : V \rightarrow V$$

bir lineer dönüşüm olsun. Her polinom için

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

$$f(T) = a_0I + a_1T + \cdots + a_nT^n$$

tanımlayalım. Böylece,

$$f(x) \cdot v := f(T)(v)$$

şeklinde bir etki elde edilir. Bu etki altında  $V$  bir  $F[x]$ -modül olur.

Lineer cebirdeki birçok sonuç  $F[x]$ -modüllerinin yapısı olarak yeniden yorumlanabilir.

**Not 2.6.** Vektör uzaylarında sıfırdan farklı bir vektör, sıfırdan farklı bir skaler ile çarpıldığında sıfır olamaz. Modüllerde ise bu durum değişebilir.

**Tanım 2.7.**  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Eğer sıfırdan farklı bir  $r \in R$  için  $rm = 0$  oluyorsa,  $m \in M$  elemanına *torsiyon (burulmalı) eleman* denir.

**Örnek 2.8.**  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$   $\mathbb{Z}$ -modülünü düşünelim.  $3(\bar{2}) = \bar{0}$ . Dolayısıyla,  $\bar{2}$  bir burulmalı elemandır.

Bu durum vektör uzaylarında asla gerçekleşmez.

**Örnek 2.9** (Klein Dörtlü Grup Bir  $\mathbb{Z}$ -Modül Olarak). Klein dörtlü grubu

$$V_4 = \{0, a, b, c\}$$

olsun. Bu grup abelyen olduğundan bir  $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Ayrıca,

$$2a = 2b = 2c = 0$$

olur.

Dolayısıyla sıfırdan farklı her eleman burulmalıdır. Başka bir ifadeyle,

$$V_4 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

bir  $\mathbb{Z}$ -modülüdür.

**Örnek 2.10** (Klein Dörtlü Grubu Bir Vektör Uzayı Olarak). Her  $x \in V_4$  için  $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  cismi üzerinde skaler çarpımı

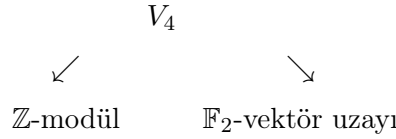
$$0 \cdot x = 0, \quad 1 \cdot x = x$$

şeklinde tanımlayalım. Bu tanım ile  $V_4$  bir  $\mathbb{F}_2$ -vektör uzayı olur. Ayrıca

$$V_4 = \{0, a, b, a + b\}$$

şeklinde yazılabilir ve  $\dim_{\mathbb{F}_2}(V_4) = 2$  olur. Dolayısıyla,

$$V_4 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 = \mathbb{F}_2^2.$$



**Not 2.11.** Yukarıdaki örneklerde görüldüğü üzere, aynı toplamsal grup farklı halkalar üzerinde farklı modüller olarak düşünülebilir. Modül teorisinde yalnızca modülün kendisi değil, hangi halka üzerinde modül olarak ele alındığı da önemlidir.

**Not 2.12.** Bir halka homomorfizması

$$\varphi : R \rightarrow S$$

verildiğinde, bir  $S$ -modülü çoğu zaman doğal olarak bir  $R$ -modülü olarak da düşünülebilir. Örneğin

$$\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

halka epimorfizması sayesinde her  $\mathbb{F}_2$ -vektör uzayı aynı zamanda bir  $\mathbb{Z}$ -modüldür.

### 3 AltModüller

**Tanım 3.1.**  $M_R$  bir sağ  $R$ -modül olsun.  $N \subseteq M$  altkümesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $N$ 'ye  $M$ 'nin bir *altmodülü* denir:

1.  $N$ ,  $M$ 'nin toplamsal altgrupudur.
2. Her  $n \in N$  ve her  $r \in R$  için  $nr \in N$ 'dir.

Bu durumda,  $N_R \leq M_R$  yazarız.

**Örnek 3.2.**  $\mathbb{Z}$  bir  $\mathbb{Z}$ -modül olarak düşünölsün. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $n\mathbb{Z}$  kümesi  $\mathbb{Z}$ 'nin bir alt modüldür.

**Önerme 3.3** (Altmodül Kriteri).  $M_R$  bir modül ve  $N \subseteq M$  boş olmayan bir altküme olsun.  $N$  bir altmodüldür ancak ve ancak her  $x, y \in N$  ve her  $r \in R$  için  $x - y \in N$  ve  $rx \in N$  olur.

**Örnek 3.4.**  $F$  bir cisim olsun.  $F[x]$  polinom halkası kendi üzerinde bir modüldür. Bu durumda,  $\langle x \rangle = \{xf(x) \mid f(x) \in F[x]\}$  bir alt modüldür.

**Tanım 3.5.**  $M$  bir  $R$ -modülü olsun. Eğer  $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$  olacak şekilde sonlu sayıda eleman tarafından üretiliyorsa,  $M$ 'ye *sonlu üretilmiş modül* denir.

Eğer bir  $m \in M$  için  $M = Rm = \{rm : r \in R\}$  oluyorsa,  $M$ 'ye *devirli modül* denir. Bu durumda,  $m$  elemanına  $M$ 'nin bir üretici denir.

**Örnek 3.6.**  $\mathbb{Z}$  bir  $\mathbb{Z}$ -modül olarak devirlidir.

Gerçekten,

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cdot 1.$$

Dolayısıyla 1,  $\mathbb{Z}$  modülünün bir üreticidir.

**Örnek 3.7.**  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  bir devirli  $\mathbb{Z}$ -modüldür, çünkü

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cdot \bar{1}.$$

**Örnek 3.8.**  $\mathbb{Z}^2$  sonlu üretilmiştir. Gerçekten,

$$\mathbb{Z}^2 = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle.$$

Ancak  $\mathbb{Z}^2$  devirli değildir.

**Örnek 3.9** (Bir Matris Modülünün Alt Modülü).  $F$  bir cisim olsun ve

$$M = M_{2 \times 2}(F)$$

kümesini düşünelim.

Toplama ve skaler çarpma işlemleri bileşen bazında tanımlandığından  $M$ , bir  $F$ -vektör uzayı, dolayısıyla bir  $F$ -modüldür.

Şimdi

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in F \right\}$$

kümesini ele alalım.  $N$ ,  $M$ 'nin bir alt modülüdür.

Gerçekten, eğer

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elemanları  $N$ 'de ise,

$$A + B = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N$$

olur.

Ayrıca her  $\lambda \in F$  için

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N$$

elde edilir.

Dolayısıyla  $N$ , toplama ve skaler çarpmaya göre kapalıdır ve bu nedenle  $M$ 'nin bir alt modülüdür.

**Önerme 3.10** (Alt Modüllerin Kesişimi ve Toplamı).  $M_R$  bir sağ  $R$ -modül olsun ve  $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ,  $M$ 'nin alt modüllerinden oluşan bir aile olsun.

1.  $\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha$ ,  $M$ 'nin bir alt modülüdür.

2.  $\sum_{\alpha \in A} M_\alpha = \{m_{\alpha_1} + \cdots + m_{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}, m_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}\}$ ,  $M$ 'nin bir alt modülüdür.

*Kanıt.* (1)  $N = \bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha$  olsun. Eğer  $x, y \in N$  ise, her  $\alpha \in A$  için  $x, y \in M_\alpha$  olur. Her  $M_\alpha$  alt modül olduğundan  $x - y \in M_\alpha$  olur. Bu her  $\alpha$  için geçerli olduğundan  $x - y \in N$  elde edilir. Ayrıca,  $r \in R$  için, yine her  $\alpha \in A$  için  $xr \in M_\alpha$  olur. Dolayısıyla,  $xr \in N$ 'dir.

(2)  $S = \sum_{\alpha \in A} M_\alpha$  olsun.  $x, y \in S$  alalım. O halde,  $x = m_{\alpha_1} + \dots + m_{\alpha_n}$  ve  $y = m_{\beta_1} + \dots + m_{\beta_k}$  şeklinde yazılabilir. Burada her terim ilgili alt modüllerden gelir. O zaman,

$$x - y = m_{\alpha_1} + \dots + m_{\alpha_n} - m_{\beta_1} - \dots - m_{\beta_k}$$

yine bu alt modüllerden gelen sonlu sayıda elemanın toplamıdır. Dolayısıyla,  $x - y \in S$  olur. Ayrıca  $r \in R$  için

$$xr = (m_{\alpha_1} + \dots + m_{\alpha_n})r = m_{\alpha_1}r + \dots + m_{\alpha_n}r.$$

Her  $M_{\alpha_i}$  alt modül olduğundan  $m_{\alpha_i}r \in M_{\alpha_i}$  elde edilir. Bu nedenle,  $xr \in S$  olur.  $\square$

**Not 3.11.**  $\sum_{\alpha \in A} M_\alpha$  kümesi, tüm  $M_\alpha$  alt modüllerini içeren en küçük alt modüldür. Başka bir ifadeyle, bu toplam  $\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$  kümesini içeren en küçük alt modüldür.

## 4 Faktör Modüller

Alt modüller, yeni modüller elde etmemizi sağlar.

**Tanım 4.1.**  $M_R$  bir sağ  $R$ -modül ve  $N \leq M$  bir alt modül olsun.  $M/N$  bölüm grubunu düşünelim:

$$M/N = \{m + N : m \in M\}.$$

Bu küme üzerinde

$$(m + N)r := mr + N$$

şeklinde bir skaler çarpma tanımlanır.

Bu işlem iyi tanımlıdır ve  $M/N$  bir sağ  $R$ -modül olur. Bu modüle  $M$ 'nin  $N$  ile bölümünden elde edilen *faktör modül* (veya *bölüm modül*) denir.

**Örnek 4.2.**  $R[X]$  modülünü düşünelim ve

$$P = \{f(X) \in R[X] : f(0) = 0\} = XR[X]$$

olsun.  $P$ ,  $R[X]$ 'in bir alt modülüdür.

Her polinom

$$f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$$

için

$$f(X) + P = a_0 + P$$

olur; çünkü

$$a_1X + \dots + a_nX^n \in P.$$

Dolayısıyla her koset sabit bir polinom tarafından temsil edilir.

Bundan

$$R[X]/P \cong R$$

sonucu elde edilir.

**Örnek 4.3.**  $M_3(R)$  modülünü düşünelim ve

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} : a_{ij} \in R \right\}$$

olsun.  $N$ ,  $M_3(R)$ 'in bir alt modülüdür. Bir matrisin  $N$  ile bölümünde yalnızca ikinci sütunu önemlidir; çünkü birinci ve üçüncü sütunlar  $N$  içinde yok edilebilir. Bu nedenle her koset

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + N$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla,  $M_3(R)/N$  modülü, ikinci sütunların oluşturduğu modül ile özdeşleştirilebilir. Başka bir ifadeyle,  $M_3(R)/N \cong R^3$  olur.

**Tanım 4.4.**  $M$  bir  $R$ -modülü ve  $N < M$  öz altmodülü olsun. Eğer

$$N \subseteq L \subseteq M$$

koşulunu sağlayan her alt modül  $L$  için  $L = N$  veya  $L = M$  oluyorsa,  $N$ 'ye  $M$ 'nin *maksimal alt modülü* denir.

**Örnek 4.5.**  $\mathbb{Z}$  modülünü düşünelim.  $p$  asal sayı olsun.  $p\mathbb{Z}$  altmodülü maksimaldir.

Altmodül yapısı mümkün olduğunca basit olan modüller özel bir öneme sahiptir.

**Tanım 4.6.**  $M \neq 0$  bir  $R$ -modülü olsun. Eğer  $M$ 'nin yalnızca  $0$  ve  $M$  altmodülleri varsa,  $M$ 'ye *basit modül* denir.

**Örnek 4.7.**  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  bir basit  $\mathbb{Z}$ -modülüdür.

**Teorem 4.8.**  $N < M$  öz alt modülü için aşağıdakiler denktir:

1.  $N$ ,  $M$ 'nin maksimal alt modülüdür.
2.  $M/N$  basit bir modüldür.

**Örnek 4.9.**  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  modülünün alt modüllerini inceleyelim. Bu modülün alt modülleri

$$0, \quad \langle \bar{6} \rangle, \quad \langle \bar{4} \rangle, \quad \langle \bar{3} \rangle, \quad \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

şeklinindedir. Burada

$$\langle \bar{6} \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \langle \bar{4} \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad \langle \bar{3} \rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Dolayısıyla  $\langle \bar{4} \rangle$  ve  $\langle \bar{3} \rangle$  maksimal alt modüllerdir. Ayrıca

$$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/\langle \bar{4} \rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/\langle \bar{3} \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Bu örnek maksimal alt modüller ile basit faktör modüller arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

## Birinci Gün Alıştırılmaları

1.  $A$  bir sağ ideal ve  $M$  bir sağ  $R$ -modülü olsun.
  - (a)  $A^{(n)}$ 'in bileşen bazında işlemlerle bir  $R$ -modülü olduğunu gösteriniz.
  - (b)  $MA = \{\sum_{i=1}^n x_i a_i : x_i \in M, a_i \in A, n \geq 1\}$  kümesinin  $M$ 'nin bir alt modülü olduğunu gösteriniz.
  - (c)  $N \leq M$  için  $(M/N)A = (N + MA)/N$  eşitliğini ispatlayınız.
2.  $N$ , sıfır olmayan bir  $M$   $R$ -modülünün öz altmodülü ve  $x \in M \setminus N$  olsun. Zorn Lemması'nı kullanarak,  $N$ 'yi içeren ve  $x \notin N'$  koşulunu sağlayan maksimal bir  $N'$  alt modülünün var olduğunu gösteriniz.
3. (a) Sonlu üretilmiş olup sonlu üretilmemiş bir altmodüle sahip bir  $R$ -modül örneği bulunuz.  
(b)  $M$  sonlu üretilmiş bir  $R$ -modül ve  $N \leq M$  olsun.  $M/N$ 'nin sonlu üretilmiş olduğunu gösteriniz.

## İkinci Gün

### 5 Modül Homomorfizmaları

Vektör uzaylarında lineer dönüşümler önemli bir rol oynar. Modül teorisinde bunların karşılığı modül homomorfizmalarıdır.

**Tanım 5.1.**  $M_R$  ve  $N_R$  sağ  $R$ -modülleri olsun.  $f : M \rightarrow N$  dönüşümü her  $x, y \in M$  ve her  $r \in R$  için

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

ve

$$f(xr) = f(x)r$$

koşullarını sağlıyorsa,  $f$ 'ye bir *modül homomorfizması* denir.

**Tanım 5.2.**  $f : M \rightarrow N$  bir  $R$ -modül homomorfizması olsun.

1.  $f$  1-1 ise  $f$ 'ye *monomorfizma* denir.
2.  $\text{Im}(f) = N$  ise  $f$ 'ye *epimorfizma* denir.
3. Hem monomorfizma hem epimorfizma ise  $f$ 'ye *izomorfizma* denir.
4. Eğer  $M = N$  ise  $f$ 'ye *endomorfizma* denir.
5. Bir endomorfizma aynı zamanda izomorfizma ise  $f$ 'ye *otomorfizma* denir.

**Tanım 5.3.**  $f : M \rightarrow N$  bir  $R$ -modül homomorfizması olsun.  $\ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$  kümesine  $f$ 'nin çekirdeği,  $\text{Im}(f) = \{f(m) : m \in M\}$  kümesine ise  $f$ 'nin görüntüsü denir.

**Önerme 5.4.**  $f : M \rightarrow N$  bir  $R$ -modül homomorfizması olsun. O halde  $\ker(f) \leq M$  ve  $\text{Im}(f) \leq N$  olur.

**Önerme 5.5.**  $f : M \rightarrow N$  bir  $R$ -modül homomorfizması olsun. O halde  $f$  ancak ve ancak  $\ker(f) = 0$  ise *injektiftir*.

*Kanıt.* Eğer  $f$  injektif ise ve  $x \in \ker(f)$  ise  $f(x) = 0 = f(0)$  olduğundan  $x = 0$  elde edilir. Dolayısıyla  $\ker(f) = 0$ 'dır. Tersine,  $\ker(f) = 0$  olsun ve  $f(x) = f(y)$  olsun. O halde  $f(x - y) = 0$  olur. Buradan  $x - y \in \ker(f) = 0$  elde edilir. Dolayısıyla  $x = y$ 'dir.  $\square$

### 6 İzomorfizma Teoremleri

Aşağıdaki sonuçlar grup ve halka teorisindeki izomorfizma teoremlerinin modül teorisindeki karşılıklarıdır.

**Teorem 6.1** (Birinci İzomorfizma Teoremi).  $f : M \rightarrow N$  bir  $R$ -modül homomorfizması olsun. O halde  $M/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$ .

*Kanıt.*  $\varphi : M/\ker(f) \rightarrow \text{Im}(f)$  dönüşümünü  $\varphi(m + \ker(f)) = f(m)$  şeklinde tanımlayalım. Önce bunun iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Eğer  $m + \ker(f) = m' + \ker(f)$  ise  $m - m' \in \ker(f)$  olur. Dolayısıyla  $f(m - m') = 0$  ve buradan  $f(m) = f(m')$  elde edilir. O halde  $\varphi$  iyi tanımlıdır.

Şimdi  $\varphi$ 'nin homomorfizma olduğunu görelim. Her  $m, m' \in M$  ve  $r \in R$  için  $\varphi((m + m') + \ker(f)) + \ker(f) = f(m + m') = f(m) + f(m') = \varphi(m + \ker(f)) + \varphi(m' + \ker(f))$  ve  $\varphi((m + \ker(f))r) = \varphi(mr + \ker(f)) = f(mr) = f(m)r = \varphi(m + \ker(f))r$  olur.

$\varphi$  örten bir dönüşümdür; çünkü  $\text{Im}(f)$ 'nin her elemanı zaten bir  $f(m)$  biçimindedir. Son olarak  $\varphi(m + \ker(f)) = 0$  ise  $f(m) = 0$  olur, yani  $m \in \ker(f)$  ve dolayısıyla  $m + \ker(f) = \ker(f)$  elde edilir. Bu nedenle  $\ker(\varphi) = 0$  ve  $\varphi$  birebirdir. Sonuç olarak  $\varphi$  bir izomorfizmadır.  $\square$

**Teorem 6.2** (İkinci İzomorfizm Teoremi).  $A, B \leq M$  olsun. O halde,

$$(A + B)/B \cong A/(A \cap B).$$

**Teorem 6.3** (Üçüncü İzomorfizm Teoremi).  $A \leq B \leq M$  olsun. O halde,

$$(M/A)/(B/A) \cong M/B.$$

**Teorem 6.4** (Eşleme Teoremi).  $N \leq M$  olsun ve  $\pi : M \rightarrow M/N$  kanonik epimorfizması verilsin. O halde  $M/N$ 'nin alt modülleri ile  $N$ 'yi içeren  $M$  alt modülleri arasında birebir eşleme vardır. Bu eşleme  $L \mapsto \pi^{-1}(L)$  ile verilir.

*Kanıt.*  $L \leq M/N$  olsun. O zaman  $\pi^{-1}(L)$ ,  $M$ 'nin bir alt modülüdür ve  $\ker(\pi) = N \subseteq \pi^{-1}(L)$ 'dir. Tersine,  $N \subseteq K \leq M$  ise  $K/N = \{k + N : k \in K\}$ ,  $M/N$ 'nin bir alt modülüdür.

Şimdi bu iki işlemin birbirinin tersi olduğunu gösterebiliriz. Eğer  $N \subseteq K \leq M$  ise  $\pi^{-1}(K/N) = K$ 'dir. Gerçekten,  $m \in \pi^{-1}(K/N)$  ise  $m + N = k + N$  olacak şekilde bir  $k \in K$  vardır. Buradan  $m - k \in N \subseteq K$  elde edilir; dolayısıyla  $m \in K$ .

Öte yandan  $L \leq M/N$  ise  $\pi(\pi^{-1}(L)) = L$  olduğundan  $\pi^{-1}(L)/N = L$  elde edilir. Sonuç olarak  $L \mapsto \pi^{-1}(L)$  ve  $K \mapsto K/N$  dönüşümleri birbirinin tersidir ve istenen birebir eşlemeyi verir.  $\square$

**Tanım 6.5.**  $M$  ve  $N$  iki  $R$ -modül olsun.  $M$ 'den  $N$ 'ye tüm modül homomorfizmalarının kümesi

$$\text{Hom}_R(M, N)$$

ile gösterilir.

**Önerme 6.6.**  $\text{Hom}_R(M, N)$  noktasal toplama altında bir abelyen gruptur.

**Teorem 6.7.**  $N < M$  öz altmodülü olsun.

$$N \text{ maksimal} \iff M/N \text{ basit.}$$

*Kanıt.* Eşleme Teoremi'ne göre  $N$ 'yi içeren alt modüller ile  $M/N$ 'nin alt modülleri arasında birebir eşleme vardır. Dolayısıyla  $N$  ile  $M$  arasında başka alt modül bulunmaması,  $M/N$ 'nin yalnızca 0 ve kendisine sahip olması ile denktir.  $\square$

**Örnek 6.8.**  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$ ,  $f(n) = \bar{n}$  dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşüm sürjektiftir ve

$$\ker(f) = 6\mathbb{Z}.$$

Birinci İzomorfizma Teoremi'ne göre

$$\mathbb{Z}/\ker(f) \cong \text{Im}(f),$$

dolayısıyla

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_6.$$

Bu örnek Birinci İzomorfizma Teoremi'nin en temel uygulamasıdır.

**Örnek 6.9.**  $A = 4\mathbb{Z}$  ve  $B = 6\mathbb{Z}$  olsun. O halde

$$A + B = 2\mathbb{Z}, \quad A \cap B = 12\mathbb{Z}.$$

İkinci İzomorfizma Teoremi'ne göre

$$(A + B)/B \cong A/(A \cap B).$$

Gerçekten,

$$(2\mathbb{Z})/(6\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad (4\mathbb{Z})/(12\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

## 7 Devirli Modüller

**Tanım 7.1.**  $M$  bir  $R$ -modülü olsun. Eğer bir  $m \in M$  için  $M = mR = \{mr : r \in R\}$  oluyorsa,  $M$ 'ye *devirli modül* denir. Bu durumda  $m$  elemanına  $M$ 'nin bir üretici denir.

**Örnek 7.2.**  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}$  üzerinde devirli bir modüldür; çünkü  $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cdot 1$ .

**Örnek 7.3.**  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}$  üzerinde devirli bir modüldür; çünkü  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cdot \bar{1}$ .

**Örnek 7.4.** Her halka kendi üzerinde bir devirli sağ modüldür. Gerçekten,  $R_R = R \cdot 1$ 'dir.

**Önerme 7.5.** Her basit modül devirlidir.

*Kanıt.*  $M$  basit bir modül ve  $0 \neq m \in M$  olsun. O halde,  $mR$ ,  $M$ 'nin sıfır olmayan bir alt modülüdür. Basitlikten  $mR = M$  elde edilir. Dolayısıyla,  $M$  devirlidir.  $\square$

Bir devirli modülün yapısını anlamak için, üretici sıfıra gönderen skalerleri incelemek gerekir.

**Tanım 7.6.**  $M$  bir  $R$ -modül ve  $m \in M$  olsun.

$$\text{Ann}(m) = \{r \in R : mr = 0\}$$

kümesine  $m$  elemanının sıfırlayıcı (annihilator) denir.

**Örnek 7.7.**  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  modülünde

$$\text{Ann}(\bar{1}) = 6\mathbb{Z}.$$

Daha genel olarak,

$$\text{Ann}(\bar{1}) = n\mathbb{Z}$$

olur.

**Önerme 7.8.**  $\text{Ann}(m)$ ,  $R$ 'nin bir sağ idealidir.

*Kanıt.* Alt grup kriteri ve  $m(ar) = (ma)r$  özelliği kullanılır.  $\square$

**Teorem 7.9.**  $M = mR$  bir devirli modülü için

$$M \cong R/\text{Ann}(m)$$

olur.

*Kanıt.*

$$\varphi : R \rightarrow M, \quad \varphi(r) = mr$$

dönüşümünü tanımlayalım.  $\varphi$  bir modül homomorfizmasıdır ve  $M = mR$  olduğundan örtendir. Ayrıca,

$$\ker(\varphi) = \text{Ann}(m).$$

Birinci İzomorfizm Teoremi'nden

$$R/\text{Ann}(m) \cong M$$

elde edilir.  $\square$

**Sonuç 7.10.** Her basit  $R$ -modül,  $R/I$  biçimindedir; burada  $I$ ,  $R$ 'nin bir maksimal sağ idealidir.

## 8 Direkt Çarpımlar ve Direkt Toplamlar

**Tanım 8.1.**  $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$  sağ  $R$ -modüllerinden oluşan bir aile olsun. Kartezyen çarpım

$$\prod_{\alpha \in A} M_\alpha$$

üzerinde toplama ve skaler çarpma bileşen bazında tanımlanır. Bu yapı ile elde edilen modüle modüllerin direkt çarpımı denir.

**Tanım 8.2.**  $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$  sağ  $R$ -modüllerinden oluşan bir aile olsun. Direkt çarpımın yalnızca sonlu sayıda bileşeni sıfırdan farklı olan elemanlarından oluşan alt modülüne modüllerin (dış) direkt toplamı denir ve

$$\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$$

ile gösterilir.

**Not 8.3.** Eğer indeks kümesi sonlu ise direkt çarpım ve dış direkt toplam çakışır:

$$M_1 \times \cdots \times M_n = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n.$$

Sonsuz durumda ise genel olarak

$$\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha \subsetneq \prod_{\alpha \in A} M_\alpha.$$

**Örnek 8.4.**  $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$  modülünün elemanları yalnızca sonlu sayıda bileşeni sıfırdan farklı olan dizilerdir. Buna karşılık  $(1, 1, 1, \dots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$  iken  $(1, 1, 1, \dots) \notin \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ 'dir.

**Tanım 8.5.**  $N_1, \dots, N_t \leq M$  olsun. Bu alt modüllerin toplamı

$$N_1 + \cdots + N_t = \{n_1 + \cdots + n_t : n_i \in N_i\}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 8.6.**  $M = N_1 + \cdots + N_t$  olsun. Eğer her  $i$  için  $N_i \cap \sum_{j \neq i} N_j = 0$  ise bu toplama iç direkt toplam denir ve

$$M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_t$$

şeklinde yazılır.

**Önerme 8.7.**  $M = N_1 + \cdots + N_t$  olsun. O zaman,  $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_t$  ancak ve ancak her  $m \in M$  elemanı

$$m = n_1 + \cdots + n_t, \quad n_i \in N_i,$$

biçiminde tek türlü yazılabilir.

**Teorem 8.8.**  $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_t$  olsun. O halde,

$$M \cong N_1 \oplus \cdots \oplus N_t,$$

burada sağ taraftaki toplam dış direkt toplamdır.

*Kanıt.*  $\varphi : N_1 \oplus \cdots \oplus N_t \rightarrow M$ ,  $\varphi(n_1, \dots, n_t) = n_1 + \cdots + n_t$  ile tanımlansın. İç direkt toplam varsayımından dolayı  $\varphi$  hem birebir hem de örtendir.  $\square$

**Örnek 8.9.**  $V$  bir  $F$ -vektör uzayı ve  $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$  bir bazı olsun. O halde

$$V = \bigoplus_{i \in I} Fv_i.$$

Gerçekten, her vektör baz elemanlarının sonlu bir lineer kombinasyonu olarak tek türlü yazılır.

**Örnek 8.10.**

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Daha genel olarak,  $(s, t) = 1$  ve  $n = st$  ise

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/s\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}.$$

Bu sonuç Çin Kalan Teoremi'nin bir uygulamasıdır.

**Örnek 8.11.** Her  $k \geq 0$  için  $R_k = \{aX^k : a \in R\}$  olsun. O halde

$$R[X] = \bigoplus_{k=0}^{\infty} R_k.$$

**Örnek 8.12.**  $M_n(R)$  modülü için

$$M_n(R) = r_1(R) \oplus \cdots \oplus r_n(R)$$

ve

$$M_n(R) = c_1(R) \oplus \cdots \oplus c_n(R)$$

olur. Burada  $r_i(R)$  ve  $c_i(R)$  sırasıyla yalnızca  $i$ 'inci satırı ve yalnızca  $i$ 'inci sütunu sıfırdan farklı olan matrislerden oluşan alt modüllerdir.

““latex

**Not 8.13.** Dış direkt toplam  $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ , her  $\alpha \in A$  için doğal gömülmeler

$$i_\alpha : M_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$$

ile birlikte aşağıdaki evrensel özelliği sağlar: Her modül  $N$  ve her homomorfizma ailesi  $f_\alpha : M_\alpha \rightarrow N$  için diyagramı değişmeli yapan tek bir

$$f : \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha \rightarrow N$$

homomorfizması vardır.

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha \\ & \searrow f_\alpha & \downarrow f \\ & & N \end{array}$$

Başka bir deyişle, her  $\alpha$  için  $f \circ i_\alpha = f_\alpha$  olur ve bu özelliği sağlayan  $f$  tektir.

**Not 8.14.** Direkt çarpım  $\prod_{\alpha \in A} M_\alpha$ , her  $\alpha \in A$  için doğal izdüşümler  $p_\alpha : \prod_{\alpha \in A} M_\alpha \rightarrow M_\alpha$  ile birlikte şu evrensel özelliği sağlar: Her modül  $N$  ve her homomorfizma ailesi  $f_\alpha : N \rightarrow M_\alpha$  için  $p_\alpha \circ f = f_\alpha$  koşulunu sağlayan tek bir homomorfizma  $f : N \rightarrow \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$  vardır.

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ f \swarrow & & \searrow f_\alpha \\ \prod_{\alpha \in A} M_\alpha & \xrightarrow{p_\alpha} & M_\alpha \end{array}$$

**Önerme 8.15.**  $M = M_1 \oplus M_2$  olsun. O halde,

$$M/M_1 \cong M_2 \quad \text{ve} \quad M/M_2 \cong M_1.$$

*Kanıt.*  $\varphi : M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_2$  dönüşümünü

$$\varphi(m_1 + m_2) = m_2$$

ile tanımlayalım. Bu bir sürjektif modül homomorfizmasıdır ve

$$\ker(\varphi) = M_1.$$

Birinci İzomorfizm Teoremi'nden

$$M/M_1 \cong M_2$$

elde edilir. Diğer izomorfizm benzer şekilde gösterilir.  $\square$

**Tanım 8.16.**  $M$  bir  $R$ -modülü olsun.  $M$ 'den kendisine tüm modül homomorfizmalarının kümesi

$$\text{End}_R(M) = \text{Hom}_R(M, M)$$

ile gösterilir ve fonksiyonların toplanması ile bileşkesi altında bir halka oluşturur. Bu halkaya  $M$ 'nin endomorfizma halkası denir.

**Lemma 8.17** (Schur).  $M$  ve  $N$  basit  $R$ -modülleri olsun. Eğer

$$f : M \rightarrow N$$

sıfır olmayan bir modül homomorfizması ise,  $f$  bir izomorfizmadır.

*Kanıt.*  $\ker(f)$ ,  $M$ 'nin bir alt modülüdür.  $M$  basit olduğundan  $\ker(f) = 0$  veya  $\ker(f) = M$  olur.  $f \neq 0$  olduğundan  $\ker(f) \neq M$  ve dolayısıyla  $\ker(f) = 0$ 'dır. Böylece  $f$  injektiftir. Öte yandan  $\text{Im}(f)$ ,  $N$ 'nin sıfır olmayan bir altmodülüdür.  $N$  basit olduğundan  $\text{Im}(f) = N$  olur. Dolayısıyla,  $f$  sürjektiftir.  $\square$

**Teorem 8.18.**  $M$  basit bir  $R$ -modülü ise  $\text{End}_R(M)$  bir bölümlü halkadır.

*Kanıt.* Schur Lemması'na göre her sıfır olmayan endomorfizma bir otomorfizmadır. Dolayısıyla  $\text{End}_R(M)$  halkasında sıfırdan farklı her elemanın çarpımsal tersi vardır. Bu nedenle  $\text{End}_R(M)$  bir bölümlü halkadır.  $\square$

**Örnek 8.19.**  $M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  olsun. Her  $\mathbb{Z}$ -modül endomorfizması

$$f(\bar{1}) = \bar{a}$$

ile belirlenir. Bu nedenle

$$\text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathbb{F}_p.$$

## İkinci Gün Alıştırmaları

1.  $M$  bir  $R$ -modül ve  $I$ ,  $R$ 'nin  $MI = 0$  koşulunu sağlayan bir ideali olsun. Bu durumda  $M$ ,  $x(a + I) = xa$  işlemiyle bir  $R/I$ -modül olur. (a)  $M$ 'nin  $R$ -modül olarak alt modülleri ile  $R/I$ -modül olarak alt modülleri arasında birebir eşleme olduğunu gösteriniz. (b)  $N$  de  $NI = 0$  koşulunu sağlayan bir  $R$ -modül ise,  $f : M \rightarrow N$  dönüşümününün  $R$ -lineer olması ancak ve ancak  $R/I$ -lineer olması ile denktir.

2.  $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  bir  $R$ -modül ailesi ve  $N$  bir  $R$ -modülü olsun. Evrensel özelliği kullanarak, aşağıdaki abel grup izomorfizmalarını gösteriniz:

$$(a) \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} M_\alpha, N\right) \cong \prod_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(M_\alpha, N).$$

$$(b) \text{Hom}_R\left(N, \prod_{\alpha \in \Delta} M_\alpha\right) \cong \prod_{\alpha \in \Delta} \text{Hom}_R(N, M_\alpha).$$

3.  $R$  bir halka olsun. İki ideal  $I_1$  ve  $I_2$  için  $I_1 + I_2 = R$  ise bu ideallere comaximal denir.
- (a)  $I_1$  ve  $I_2$  comaximal ise  $I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$  olduğunu ve  $R/I_1 I_2 = R/(I_1 \cap I_2) \cong R/I_1 \oplus R/I_2$  izomorfizmasını gösteriniz. *İpucu:*  $f : R \rightarrow R/I_1 \oplus R/I_2$ ,  $f(a) = (a+I_1, a+I_2)$  dönüşümünü kullanınız.
- (b)  $\{I_i\}_{i=1}^n$  ikişer ikişer comaximal ideallerden oluşan bir aile ise  $I_1 I_2 \cdots I_n = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n$  ve  $R/(I_1 I_2 \cdots I_n) \cong R/\bigcap_{i=1}^n I_i \cong \bigoplus_{i=1}^n R/I_i$  olduğunu gösteriniz.
- (c) Bu sonucu kullanarak  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  izomorfizmasını doğrulayınız.

## Üçüncü Gün

### 9 Serbest (Free) Modüller

**Tanım 9.1.**  $M$  bir  $R$ -modülü ve  $X \subseteq M$  olsun. Eğer  $x_1r_1 + \dots + x_nr_n = 0$  eşitliğinden daima  $r_1 = \dots = r_n = 0$  sonucu çıkıyorsa,  $X$  kümesine doğrusal bağımsız denir.

**Tanım 9.2.**  $X \subseteq M$  olsun. Eğer

$$M = \sum_{x \in X} xR$$

ise  $X$  kümesine  $M$ 'yi üreten küme denir.

**Tanım 9.3.** Hem doğrusal bağımsız hem de üreten bir kümeye taban denir.

**Tanım 9.4.** Tabanı olan modüllere *serbest (free) modül* denir.

**Örnek 9.5.**  $R_R$  bir serbest modüldür. Gerçekten,  $\{1\}$  kümesi  $R$  için bir tabandır.

**Örnek 9.6.**  $R^n$  bir serbest modüldür. Standart taban

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

tarafından üretilir.

**Örnek 9.7.**  $V$  bir  $F$ -vektör uzayı ve  $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$  bir tabanı olsun. O zaman,

$$V = \bigoplus_{i \in I} Fv_i$$

olur. Dolayısıyla, her vektör uzayı bir serbest modüldür.

**Örnek 9.8.**  $M_n(R)$  sağ  $R$ -modülü serbesttir. Bir tabanı, matris birimleri kümesi  $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ 'dir. Burada  $E_{ij}$ ,  $(i, j)$ -girdisi 1 ve diğer girdileri 0 olan matristir. Örneğin  $(a_{ij}) \in M_2(R)$  için  $(a_{ij}) = E_{11}a_{11} + E_{12}a_{12} + E_{21}a_{21} + E_{22}a_{22}$  olur. Dolayısıyla  $M_n(R)$ ,  $n^2$  elemanlı bir tabana sahip serbest bir  $R$ -modüldür.

**Örnek 9.9.**  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $R = \mathbb{Z}$  üzerinde,  $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (veya  $n > 1$  olmak üzere herhangi bir  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ) bölüm modülünü ele alalım.  $M$  modülü, eleman olarak  $\{\bar{0}, \bar{1}\}$  kümesinden oluşur ve  $\bar{1}$  elemanı modülü üretir. Ancak  $\bar{1}$  lineer bağımsız değildir.  $\mathbb{Z}$  halkasından sıfırdan farklı bir skaler olan 2 ile çarpığımızda sonuç modülün sıfır elemanını verir:

$$2 \cdot \bar{1} = \bar{0}$$

Sıfırdan farklı bir skaler ile çarpıldığında sıfır sonucunu veren bir eleman (burulma elemanı) lineer bağımsız olamaz. Modül içinde lineer bağımsız hiçbir boş olmayan küme kurulamayacağı için  $M$ 'nin bir tabanı yoktur. Dolayısıyla, serbest değildir.

**Örnek 9.10.**  $R = \mathbb{Z}$  halkası üzerinde, rasyonel sayılar  $M = \mathbb{Q}$  modülünü düşünelim. Bu modülde sıfırdan farklı hiçbir rasyonel sayının, sıfırdan farklı bir tam sayıyla çarpımı sıfır etmez (yani burulmalı elemanı yoktur). Ancak  $\mathbb{Q}$  modülü de serbest değildir. Neden serbest değildir?  $\mathbb{Q}$  içindeki herhangi iki rasyonel sayı,  $\mathbb{Z}$  üzerinde her zaman lineer bağımlıdır. Örneğin,  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  gibi iki eleman için skaler katsayılar kullanılarak şu eşitlik her zaman yazılabilir:

$$(bc) \cdot \frac{a}{b} + (-ad) \cdot \frac{c}{d} = 0$$

Herhangi iki eleman lineer bağımlı olduğuna göre, eğer  $\mathbb{Q}$ 'nun bir tabanı olsaydı, bu taban en fazla tek bir elemandan (diyelim ki  $\frac{p}{q}$ ) oluşmak zorunda kalırdı. Fakat hiçbir tek rasyonel sayı, sadece tam sayı katları alınarak bütün rasyonel sayıları (örneğin  $\frac{p}{2q}$  elemanını) üretemez. Geçerli bir tabanı olmadığı için  $\mathbb{Q}$  modülü serbest değildir.

**Önerme 9.11.**  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ , bir  $R$ -modülü  $M$ 'nin bir altkümesi olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

(1)  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ ,  $M$  için bir tabandır.

(2)  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ ,  $M$ 'nin maksimal doğrusal bağımsız altkümesi ve minimal üreteç kümesidir.

*Kanıt.* Önce  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  bir taban olsun. Bu küme tanım gereği doğrusal bağımsızdır ve  $M$ 'yi üretir. Eğer bu kümeye  $y \notin \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  eklersek,  $y$  baz elemanlarının sonlu bir lineer kombinasyonu olarak yazılır; dolayısıyla yeni küme doğrusal bağımsız olamaz. Bu nedenle baz kümesi maksimal doğrusal bağımsızdır. Ayrıca bazdan herhangi bir  $x_\beta$  çıkarılırsa,  $x_\beta$  kalan elemanların lineer kombinasyonu olarak yazılamaz; aksi halde bazın doğrusal bağımsızlığı bozulurdu. Bu yüzden baz minimal üreteç kümesidir.

Tersine,  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  maksimal doğrusal bağımsız ve minimal üreteç kümesi olsun. Minimal üreteç kümesi olduğundan  $M$ 'yi üretir; maksimal doğrusal bağımsız olduğundan da doğrusal bağımsızdır. Dolayısıyla  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  hem üreten hem doğrusal bağımsızdır, yani  $M$  için bir tabandır.  $\square$

**Önerme 9.12.**  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ , bir  $R$ -modülü  $M$ 'nin bir altkümesi olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

(1)  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ ,  $M$  için bir tabandır.

(2) Her  $x \in M$  elemanı  $x = \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha a_\alpha$  biçiminde tek türlü yazılır; burada hemen hemen tüm  $\alpha \in \Delta$  için  $a_\alpha = 0$ 'dir.

(3)  $M = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} x_\alpha R$ 'dir.

*Kanıt.* (1)  $\Rightarrow$  (2):  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  bir baz ise  $M$ 'yi üretir; dolayısıyla her  $x \in M$  sonlu bir toplam olarak  $x = \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha a_\alpha$  biçiminde yazılır. Eğer  $x = \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha b_\alpha$  başka bir yazılış ise, çıkararak  $\sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha (a_\alpha - b_\alpha) = 0$  elde ederiz. Doğrusal bağımsızlıktan  $a_\alpha - b_\alpha = 0$  olur; yani  $a_\alpha = b_\alpha$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): Her eleman böyle yazılabildiği için  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ ,  $M$ 'yi üretir. Ayrıca  $\sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha a_\alpha = 0$  olsun. Sıfır elemanı aynı zamanda tüm katsayıları 0 olan toplamla yazılır. Yazılışın teklüğünden bütün  $a_\alpha = 0$  olur. Dolayısıyla  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  doğrusal bağımsızdır ve bu nedenle bazdır.

(2)  $\Leftrightarrow$  (3):  $M = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} x_\alpha R$  olması, tam olarak her  $x \in M$  elemanın  $x_\alpha R$  alt modüllerinden gelen sonlu sayıda elemanın toplamı olarak ve tek türlü yazılması demektir. Bu da (2)'deki ifadeyle aynıdır.  $\square$

**Sonuç 9.13.** Bir  $R$ -modül  $F$  serbesttir ancak ve ancak bir  $\Delta$  kümesi için  $F \cong R^{(\Delta)}$  olur.

*Kanıt.* Önce  $F$  serbest olsun ve tabanı  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  olsun. O zaman,  $F = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} x_\alpha R$  olur. Her  $\alpha$  için  $x_\alpha R \cong R$  olduğundan  $F \cong \bigoplus_{\alpha \in \Delta} R = R^{(\Delta)}$  elde edilir.

Tersine,  $F \cong R^{(\Delta)}$  olsun.  $R^{(\Delta)}$  modülünün standart bazı  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ 'dir. Bir izomorfizma altında tabanın görüntüsü yine bir taban olacağından  $F$  iatenden sağlanır.  $\square$

**Örnek 9.14.**  $2\mathbb{Z}$  modülünü ele alalım. Her eleman

$$2n = n \cdot 2$$

şeklinde yazılabilir ve bu gösterim tektir. Dolayısıyla

$$2\mathbb{Z} = \langle 2 \rangle$$

olur ve  $\{2\}$  kümesi bir tabandır. Sonuç olarak,  $2\mathbb{Z}$  serbest bir  $\mathbb{Z}$ -modülüdür.

**Örnek 9.15.** Aşağıdaki tablo bazı  $\mathbb{Z}$ -modüllerinin serbest olup olmadığını özetlemektedir:

$M$	Serbest?
$\mathbb{Z}$	Evet
$2\mathbb{Z}$	Evet
$\mathbb{Z}^2$	Evet
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	Hayır
$\mathbb{Q}$	Hayır

**Önerme 9.16.**  $F$  tabanı  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  olan serbest bir  $R$ -modül olsun.

(1) Eğer  $f, g : F \rightarrow M$   $R$ -homomorfizmaları ve her  $\alpha \in \Delta$  için  $f(x_\alpha) = g(x_\alpha)$  ise  $f = g$  olur.

(2) Eğer  $h : \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \rightarrow M$  herhangi bir fonksiyon ise, her  $\alpha \in \Delta$  için  $g(x_\alpha) = h(x_\alpha)$  olacak şekilde tek bir  $R$ -homomorfizması  $g : F \rightarrow M$  vardır.

*Kanıt.* (1) Her  $x \in F$  tek türlü olarak  $x = \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha a_\alpha$  biçiminde yazılır. O halde  $f(x) = \sum_{\alpha \in \Delta} f(x_\alpha) a_\alpha = \sum_{\alpha \in \Delta} g(x_\alpha) a_\alpha = g(x)$  olur. Dolayısıyla  $f = g$ .

(2) Her  $x \in F$  tek türlü olarak  $x = \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha a_\alpha$  biçiminde yazıldığından  $g(x) = \sum_{\alpha \in \Delta} h(x_\alpha) a_\alpha$  tanımlayalım. Yazılış tek türlü olduğu için  $g$  iyi tanımlıdır. Doğrudan kontrol ile  $g$  bir  $R$ -homomorfizmasıdır ve her  $\alpha$  için  $g(x_\alpha) = h(x_\alpha)$  olur. Teklik (1)'den gelir.  $\square$

**Önerme 9.17.** Her  $R$ -modül  $M$ , bir serbest  $R$ -modülün homomorfik görüntüsüdür. Ayrıca  $M$  sonlu üretilmiş ise bu serbest modül sonlu üretilmiş seçilebilir.

*Kanıt.*  $M$ 'nin bir üreteç kümesini  $\{m_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  ile gösterelim ve free modül  $F = R^{(\Delta)}$  olsun.  $F$ 'nin standart bazını  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  ile gösterelim. Önerme 9.16 gereğince,  $e_\alpha \mapsto m_\alpha$  fonksiyonu tek bir  $R$ -homomorfizmasına genişler:  $\varphi : F \rightarrow M$ . Açıkça  $\text{Im}(\varphi) = M$  olduğundan  $\varphi$  sürjektiftir. Eğer  $M$  sonlu üretilmiş ise  $\Delta$  sonlu seçilebilir; bu durumda  $F = R^{(\Delta)}$  sonlu üretilmiş free modüldür.  $\square$

**Örnek 9.18.**  $M = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$  olsun. O halde  $M \cong M \oplus M$  olur. Eğer  $R = \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$  alınırsa,

$$R = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, M) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, M \oplus M) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, M) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, M) \cong R \oplus R$$

olur. Dolayısıyla,  $R$  modülü hem bir elemanlı bir baza hem de iki elemanlı bir baza sahiptir. Bu örnek, genel halkalar üzerinde free modüllerde baz kardinalitesinin her zaman tek türlü belirlenmediğini gösterir.

**Not 9.19.** Bu nedenle, vektör uzaylarının aksine, genel modüllerde “boyut” kavramı dikkatli ele alınmalıdır. Taban kardinalitesinin iyi tanımlı olduğu halkalar *invariant basis number* özelliğiyle incelenir.

## Üçüncü Gün Alıştırmaları

- (a)  $V$ , bir bölümlü halka  $D$  üzerinde bir vektör uzayı ve  $U_1 \leq V$  olsun.  $V = U_1 \oplus U_2$  olacak şekilde bir altuzay  $U_2$  bulunduğunu gösteriniz. Buradan her altuzayın bir dik toplanan olduğu sonucunu çıkarınız.
- (b) Serbest bir  $R$ -modülün bir altmodülünün serbest olmak zorunda olmadığını bir örnekle gösteriniz.
- (c) (a)'daki sonucun serbest  $R$ -modüller için geçerli olmadığını bir örnekle gösteriniz.
- $F$  serbest bir  $R$ -modül olsun. Aşağıdaki diyagramda  $g : M_1 \rightarrow M_2$  bir epimorfizma olmak üzere diyagramı değişmeli yapan bir  $R$ -homomorfizması  $h : F \rightarrow M_1$  bulunduğunu gösteriniz:

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & \swarrow h & \downarrow f \\ M_1 & \xrightarrow{g} & M_2 \end{array}$$

- (a) Eğer  $F_1$  ve  $F_2$  serbest  $R$ -modüller ise  $F_1 \times F_2$ 'nin de serbest olduğunu gösteriniz.
- (b) Eğer  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  serbest  $R$ -modüllerden oluşan bir aile ise  $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} F_\alpha$  modülünün de serbest olduğunu gösteriniz.

## Dördüncü Gün

### 10 Socle ve Yaribasit Modüller

**Tanım 10.1.**  $M$  bir  $R$ -modülü olsun.  $M$ 'nin bütün basit alt modüllerinin toplamına  $M$ 'nin socle'ı denir ve  $\text{Soc}(M)$  ile gösterilir. Yani,  $\text{Soc}(M) = \sum\{S \leq M : S \text{ basit alt modül}\}$ .

**Önerme 10.2.**  $\text{Soc}(M)$ ,  $M$ 'nin bütün basit alt modüllerini içeren en büyük yarı basit alt modüldür.

*Kanıt.* Tanım gereği  $\text{Soc}(M)$ ,  $M$ 'nin bütün basit alt modüllerini içerir. Ayrıca basit alt modüllerin toplamı olduğundan yarı basittir. Eğer  $N \leq M$  yarı basit ise  $N$  basit alt modüllerin toplamıdır; bu basit alt modüllerin her biri  $M$ 'nin de basit alt modülüdür. Dolayısıyla  $N \leq \text{Soc}(M)$  olur.  $\square$

**Önerme 10.3.** Eğer  $\text{Soc}(M) \neq 0$  ise  $\text{Soc}(M)$ ,  $M$ 'nin basit alt modüllerinden oluşan bir alt ailenin direkt toplamıdır. Ayrıca her  $f : M \rightarrow M$  endomorfizması için  $f(\text{Soc}(M)) \leq \text{Soc}(M)$  olur; yani  $\text{Soc}(M)$  her endomorfizma altında değişmezdir.

*Kanıt.*  $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ ,  $M$ 'nin bütün basit altmodüllerinin ailesi olsun. Tanım gereği  $\text{Soc}(M) = \sum_{\alpha \in \Delta} S_\alpha$ 'dır. Bu aile içinden toplamı direkt olan alt aileleri ele alalım. Bu tür aileler boş değildir; çünkü tek bir basit alt modülden oluşan aile direkt toplam verir. Zorn Lemması ile toplamı direkt olan maksimal bir alt aile seçelim ve bunu  $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  ile gösterelim. Eğer  $\sum_{\alpha \in \Gamma} S_\alpha \neq \text{Soc}(M)$  ise,  $\Gamma$  dışında bir basit alt modül  $S_\beta$  bu toplamın içinde değildir. Bu durumda  $S_\beta \cap \sum_{\alpha \in \Gamma} S_\alpha = 0$  olur; çünkü  $S_\beta$  basittir. Dolayısıyla  $S_\beta + \sum_{\alpha \in \Gamma} S_\alpha$  yine direkt toplamdır. Bu,  $\Gamma$ 'nin maksimal seçimiyle çelişir. O halde  $\text{Soc}(M) = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} S_\alpha$  olur.

Şimdi  $f : M \rightarrow M$  bir endomorfizma olsun. Eğer  $S \leq M$  basit ise  $f(S)$  ya 0'dır ya da  $S$ 'nin homomorfik görüntüsü olarak basittir. Bu nedenle  $f(S) \leq \text{Soc}(M)$  olur. Socle basit alt modüllerin toplamı olduğundan  $f(\text{Soc}(M)) \leq \text{Soc}(M)$  elde edilir.  $\square$

**Örnek 10.4.**  $\text{Soc}(\mathbb{Z}) = 0$ 'dır. Çünkü  $\mathbb{Z}$ 'nin sıfırdan farklı basit alt modülü yoktur.

**Örnek 10.5.**  $V$  bir  $F$ -vektör uzayı ise  $\text{Soc}(V) = V$  olur. Çünkü  $V$ , tek boyutlu alt uzaylarının toplamıdır.

**Örnek 10.6.**  $\text{Soc}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  olur. Gerçekten,  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  ve her iki bileşen de basit  $\mathbb{Z}$ -modüldür.

**Tanım 10.7.** Bir  $R$ -modülü  $M$  için  $M = \text{Soc}(M)$  ise  $M$ 'ye yaribasit modül denir.

**Örnek 10.8.**  $D$  bir bölümlü halka olsun.  $M = D \times D$  modülünü bileşen bazında toplama ve sağdan  $D$ -çarpımı ile düşünelim. O zaman  $D \times 0$  ve  $0 \times D$  basit alt modüllerdir ve  $M = (D \times 0) \oplus (0 \times D)$  olur. Dolayısıyla  $M$  yarı basit bir  $D$ -modüldür. Daha genel olarak  $D^n = De_1 \oplus \cdots \oplus De_n$  yazılır ve  $D^n$  yaribasittir.

**Örnek 10.9.**  $D$  bir bölümlü halka olsun.  $M_n(D)$  matris halkası basit bir halkadır. Ayrıca sağ  $M_n(D)$ -modül olarak  $M_n(D) = r_1(D) \oplus \cdots \oplus r_n(D)$  şeklinde yazılır; burada  $r_i(D)$  yalnızca  $i$ 'inci satırı sıfırdan farklı olabilen matrislerden oluşur. Benzer biçimde sol modül olarak  $M_n(D) = c_1(D) \oplus \cdots \oplus c_n(D)$  olur; burada  $c_i(D)$  yalnızca  $i$ 'inci sütunu sıfırdan farklı olabilen matrislerden oluşur. Bu alt modüller minimaldir. Dolayısıyla  $M_n(D)$  hem sağ hem sol yaribasit bir halkadır.

**Önerme 10.10.** Bir modül yaribasittir ancak ve ancak basit altmodüllerinin toplamıdır.

*Kanıt.* Bu doğrudan tanımdan gelir. Gerçekten,  $M$  yaribasit ise  $M = \text{Soc}(M)$  olur ve  $\text{Soc}(M)$  basit alt modüllerin toplamıdır. Tersine,  $M$  basit alt modüllerin toplamı ise  $M = \text{Soc}(M)$  olur.  $\square$

**Lemma 10.11** (Modülerite Kuralı).  $A, B, C \leq M$  olsun ve  $A \leq C$  varsayalım. O halde

$$(A + B) \cap C = A + (B \cap C)$$

olur.

*Kanıt.* Önce  $A + (B \cap C) \subseteq (A + B) \cap C$  olduğu açıktır. Gerçekten,  $a \in A$  ve  $x \in B \cap C$  ise  $a + x \in A + B$  olur; ayrıca  $A \leq C$  ve  $x \in C$  olduğundan  $a + x \in C$  elde edilir. Tersine,  $y \in (A + B) \cap C$  olsun. O halde  $y = a + b$  olacak şekilde  $a \in A$  ve  $b \in B$  vardır. Ayrıca  $y \in C$  ve  $a \in A \leq C$  olduğundan  $b = y - a \in C$  olur. Böylece  $b \in B \cap C$  ve  $y = a + b \in A + (B \cap C)$  elde edilir.  $\square$

**Lemma 10.12.**  $M$  bir  $R$ -modülü olsun ve  $M$ 'nin her alt modülü  $M$ 'nin bir direkt toplananı olsun. O halde  $M$ 'nin her alt modülü de aynı özelliğe sahiptir; yani  $N \leq M$  ise  $N$ 'nin her altmodülü  $N$ 'nin bir dik toplananıdır.

*Kanıt.*  $N \leq M$  ve  $N_1 \leq N$  olsun. Varsayım gereği  $N_1$ ,  $M$ 'nin bir dik toplananıdır; yani bir  $N_2 \leq M$  için  $M = N_1 \oplus N_2$  olur. Şimdi  $N = N \cap M = N \cap (N_1 \oplus N_2)$  yazılır. Modüleriteden,  $N = N_1 \oplus (N \cap N_2)$  elde edilir. Dolayısıyla  $N_1$ ,  $N$ 'nin bir dik toplananıdır.  $\square$

**Teorem 10.13.** Bir  $R$ -modülü  $M$  için aşağıdaki koşullar denktir:

- (1)  $M$  yarıbasittir.
- (2)  $M$  basit modüllerin direkt toplamıdır.
- (3)  $M$ 'nin her altmodülü bir dik toplananıdır.

*Kanıt.* (1)  $\Rightarrow$  (2):  $M = \text{Soc}(M)$  olduğundan  $M$  basit alt modüllerinin toplamıdır. Bu toplam içinden Zorn Lemması ile maksimal bağımsız bir basit alt modül ailesi seçilir. Bu ailenin direkt toplamı  $T$  olsun. Eğer  $T \neq M$  ise  $M/T$  içinde sıfırdan farklı basit bir alt modül vardır; bunun ters görüntüsü  $T$ 'yi düzgün genişletir ve maksimaliteyle çelişir. Dolayısıyla  $M$  basit modüllerin direkt toplamıdır.

(2)  $\Rightarrow$  (3):  $M = \bigoplus_{\alpha \in A} S_\alpha$  ve her  $S_\alpha$  basit olsun.  $N \leq M$  alalım.  $N$  yarı basittir; dolayısıyla  $N$  de basit modüllerin direkt toplamıdır.  $N$ 'nin bir direkt toplam ayrışımını,  $M$  içindeki basit bileşenlerle birlikte maksimal bağımsız bir aileye genişletiriz. Bu genişlemenin kalan kısmı  $K$  olsun. O halde  $M = N \oplus K$  olur.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Her alt modül direkt toplayan olsun. Eğer  $M$  yarı basit değilse  $\text{Soc}(M) \neq M$  olur. O halde  $\text{Soc}(M)$  bir direkt toplayandır;  $M = \text{Soc}(M) \oplus K$  ve  $K \neq 0$  yazılır.  $K$  içinde bir basit alt modül varsa bu alt modül  $M$ 'nin socle'ı içinde olmalıdır; bu da  $K \cap \text{Soc}(M) = 0$  ile çelişir. Dolayısıyla  $K$  basit alt modül içermez. Ancak  $K \neq 0$  ve her alt modülü direkt toplayan olduğundan,  $0 \neq k \in K$  için  $kR$  içinde maksimal bir alt modül alınarak basit bir faktör elde edilir; bu faktörün ayrışması  $K$  içinde basit alt modül verir. Çelişki. Bu nedenle  $M = \text{Soc}(M)$  ve  $M$  yarı basittir.  $\square$

**Sonuç 10.14.** Yarıbasit bir modülün her faktör modülü yarıbasittir.

*Kanıt.*  $M$  yarı basit ve  $N \leq M$  olsun. Teoreme göre  $M = N \oplus K$  olacak şekilde  $K \leq M$  vardır. O halde  $M/N \cong K$  olur.  $K$  yarıbasit olduğundan  $M/N$  de yarıbasittir.  $\square$

**Örnek 10.15.**  $M = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  olsun.  $M$ 'nin tek basit alt modülü

$$p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$$

olduğundan

$$\text{Soc}(M) = p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Dolayısıyla,

$$\text{Soc}(M) \neq 0, \quad \text{Soc}(M) \neq M.$$

Bu nedenle  $M$  yarıbasit değildir.

**Örnek 10.16.**  $M = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  olsun. Çin Kalan Teoremi'ne göre

$$M \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Her iki bileşen de basit olduğundan

$$\text{Soc}(M) = M.$$

Dolayısıyla  $M$  yarı basittir. Ancak  $M$  basit değildir; çünkü sıfırdan farklı uygun alt modüllere sahiptir. Bu örnek basit modül ile yarı basit modül arasındaki farkı göstermektedir.

**Örnek 10.17.**  $M = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  olsun. Bu modülün basit altmodülleri

$$\langle \bar{6} \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \langle \bar{4} \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

olduğundan

$$\text{Soc}(M) = \langle \bar{6} \rangle + \langle \bar{4} \rangle.$$

Bu toplamın mertebesi 6 olduğundan

$$\text{Soc}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) = \langle \bar{2} \rangle \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

Dolayısıyla socle sıfırdan farklıdır ancak tüm modül değildir.

## Dördüncü Gün Alıştırmaları

1. Bir  $R$ -modülü  $M$ 'nin yarı basit olduğunu ve

$$M = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} S_{\alpha}$$

şeklinde basit modüllerin direkt toplamı olarak yazıldığını varsayalım. Gösteriniz ki  $M$  sonlu üretilmiştir ancak ve ancak sonlu sayıda basit modülün direkt toplamıdır.

## Beşinci Gün

### 11 Artin ve Noether Modüller

**Tanım 11.1.** Bir  $R$ -modül  $M$ 'nin her artan altmodül zinciri

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$$

sonlu adımda duruyorsa *Noether* denir.

$M$ 'nin her azalan altmodül zinciri

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \dots$$

sonlu adımda duruyorsa *Artin* denir.

Başka bir ifadeyle, Noether modüller artan zincir koşulunu (ACC), Artin modüller ise azalan zincir koşulunu (DCC) sağlar.

**Örnek 11.2.**  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}$ -modülü olarak Noetherdir, ancak Artin değildir.

$\mathbb{Z}$  modülünün Artin olmadığını gösterelim. Bunun için sonlu adımda durmayan bir azalan altmodül zinciri bulmak yeterlidir. Gerçekten,

$$\mathbb{Z} \supseteq 2\mathbb{Z} \supseteq 2^2\mathbb{Z} \supseteq 2^3\mathbb{Z} \supseteq \dots$$

zinciri sonsuza kadar devam eder. Dolayısıyla,  $\mathbb{Z}$  Artin değildir.

Öte yandan her altmodül  $n\mathbb{Z}$  biçiminde olduğundan ve  $\mathbb{Z}$  tek bir eleman tarafından üretildiğinden  $\mathbb{Z}$  Noetherdir. Aslında, tüm temel ideal bölgeleri Noetherdir.

**Örnek 11.3.**  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  modülünün bütün alt modülleri

$$0 \subseteq p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \subseteq \dots \subseteq p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

zincirinde yer alır. Bu nedenle  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  hem Artinian hem Noetherian'dır.

**Örnek 11.4.**  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  hem Artinian hem Noetherian'dır.

**Örnek 11.5.**  $D$  bir bölümlü halka ve  $V$  bir  $D$ -vektör uzayı olsun.

Eğer  $\dim_D(V) = n < \infty$  ise  $V$  Noetherdir. Gerçekten,

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \dots$$

bir artan alt uzay zinciri için

$$\dim_D(V_1) \leq \dim_D(V_2) \leq \dim_D(V_3) \leq \dots \leq n$$

olur. Boyut en fazla  $n$  olabileceğinden zincir sonlu adımda durur.

Öte yandan  $\dim_D(V) = \infty$  ise  $V$  Noether değildir. Bir taban

$$\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$$

seçelim ve

$$V_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$$

tanımlayalım. O zaman,

$$V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq V_3 \subsetneq \dots$$

sonsuz artan zinciri elde edilir. Dolayısıyla,  $V$  Noether değildir.

Benzer şekilde sonlu boyutlu bir vektör uzayında her azalan alt uzay zinciri de sonlu adımda durur. Dolayısıyla, sonlu boyutlu bir vektör uzayı hem Artin hem Noetherdir.

Öte yandan sonsuz boyutlu durumda  $W_n = \text{span}\{e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \dots\}$  alt uzayları için

$$W_1 \supseteq W_2 \supseteq W_3 \supseteq \dots$$

azalan zinciri elde edilir.

Bu nedenle, sonsuz boyutlu vektör uzayları Artin de değildir.

**Önerme 11.6.** Bir  $R$ -modülü  $M$  için aşağıdakiler denktir:

1.  $M$  Noetherdir.
2.  $M$ 'nin alt modüllerinden oluşan her boş olmayan küme maksimal bir elemana sahiptir.
3.  $M$ 'nin her altmodülü sonlu üretilmiştir.

*Kanıt.* (1)  $\Rightarrow$  (2):  $\mathcal{S}$  boş olmayan bir alt modül ailesi olsun. Eğer  $\mathcal{S}$  maksimal elemana sahip değilse,

$$N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq N_3 \subsetneq \dots$$

şeklinde sonlanmayan bir artan zincir elde edilir. Bu,  $M$ 'nin Noetherian olmasına aykırıdır.

(2)  $\Rightarrow$  (3):  $N \leq M$  olsun ve  $\mathcal{S}$ ,  $N$ 'nin sonlu üretilmiş alt modüllerinin kümesi olsun.  $\mathcal{S}$  boş değildir çünkü  $0 \in \mathcal{S}$ .

(2)'ye göre  $\mathcal{S}$ 'nin maksimal bir elemanı  $N^*$  vardır. Eğer  $N^* \neq N$  ise  $x \in N \setminus N^*$  seçilir. O zaman

$$N^* + Rx$$

sonlu üretilmiştir ve  $N^*$ 'yı gerçek olarak içerir. Bu,  $N^*$ 'nin maksimal olmasına aykırıdır. Dolayısıyla  $N^* = N$  ve  $N$  sonlu üretilmiştir.

(3)  $\Rightarrow$  (1):

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots$$

artan bir zincir olsun ve

$$N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$$

tanımlayalım.  $N$ ,  $M$ 'nin bir alt modülüdür. Varsayım gereği sonlu üretilmiştir:

$$N = \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

Her  $x_j$  bir  $N_{i_j}$  içinde yer alır.  $k = \max\{i_1, \dots, i_n\}$  alalım. O zaman bütün üreteçler  $N_k$  içindedir ve dolayısıyla

$$N = N_k.$$

Bu nedenle

$$N_k = N_{k+1} = N_{k+2} = \dots$$

olur. □

**Önerme 11.7.** Bir  $R$ -modülü  $M$  için aşağıdakiler denktir:

1.  $M$  Artindir.
2.  $M$ 'nin altmodüllerinden oluşan her boş olmayan küme minimal bir elemana sahiptir.

**Önerme 11.8.**  $N$  bir  $R$ -modülü  $M$ 'nin bir alt modülü olsun. O halde, aşağıdakiler denktir:

1.  $M$  Noetherdir.
2.  $N$  ve  $M/N$  Noetherdir.

Aynı ifade Noether yerine Artin yazıldığında da geçerlidir.

*Kanıt.* Önce  $M$ 'nin Noether olduğunu varsayalım.

$N$ 'nin her artan altmodül zinciri

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$$

aynı zamanda  $M$  içinde bir artan zincirdir. Dolayısıyla,  $N$  Noether olur.

Şimdi

$$L_1/N \subseteq L_2/N \subseteq \dots$$

$M/N$  içinde bir artan zincir olsun. Buna karşılık

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots$$

$M$  içinde bir artan zincir elde edilir.  $M$  Noetherian olduğundan bu zincir sonlu adımda sabitlenir. Dolayısıyla bölüm zinciri de sonlu adımda sabitlenir ve  $M/N$  Noetherian'dır.

Tersine,  $N$  ve  $M/N$ 'nin Noetherian olduğunu varsayalım.  $M$  içinde

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$$

bir artan zincir alalım.

$N$  ile kesiştirerek

$$M_1 \cap N \subseteq M_2 \cap N \subseteq \dots$$

artan zincirini elde ederiz.  $N$  Noetherian olduğundan bir  $r$  için

$$M_r \cap N = M_{r+1} \cap N = \dots$$

olur.

Öte yandan

$$(M_1 + N)/N \subseteq (M_2 + N)/N \subseteq \dots$$

zinciri  $M/N$  içinde artandır.  $M/N$  Noetherian olduğundan bir  $s$  için

$$(M_s + N)/N = (M_{s+1} + N)/N = \dots$$

olur.

$k = \max\{r, s\}$  alalım. O zaman

$$M_k \cap N = M_{k+1} \cap N$$

ve

$$(M_k + N)/N = (M_{k+1} + N)/N.$$

Modülerlikten

$$M_{k+1} = M_k + (M_{k+1} \cap N) = M_k + (M_k \cap N) = M_k$$

elde edilir. □

**Sonuç 11.9.** Sonlu sayıda Noether (Artin) modülün direkt toplamı da Noetherdir (Artindir).

**Örnek 11.10.**  $D$  bir bölümlü halka olsun.  $M_n(D)$  sonlu boyutlu bir  $D$ -vektör uzayıdır:

$$\dim_D(M_n(D)) = n^2.$$

Dolayısıyla, önceki önermeye göre  $M_n(D)$  hem Noether hem Artindir.

Artin ve Noether koşulları birlikte sağlandığında, bir modülün altmodül yapısı oldukça düzenli hale gelir. Bir sonraki adımda bu düzenliliği ölçmek için kompozisyon serileri tanıtacağız.

**Tanım 11.11.** Sıfırdan farklı bir  $R$ -modül  $M$  için

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$$

şeklinde sonlu bir altmodül zinciri verilsin. Eğer her  $i = 1, \dots, n$  için  $M_i$  modülü  $M_{i-1}$  içinde maksimal bir altmodül ise, bu zincire  $M$ 'nin bir *kompozisyon serisi* denir.

Bu durumda bölüm modülleri

$$M_{i-1}/M_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

basit modüllerdir ve bunlara kompozisyon serisinin *kompozisyon faktörleri* denir.

Serideki  $n$  sayısına kompozisyon serisinin *uzunluğu* denir.

**Örnek 11.12.**

$$M = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

modülünü  $\mathbb{Z}$  üzerinde ele alalım.

$$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \supset 4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \supset 0$$

bir kompozisyon serisidir. Gerçekten,

$$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

$$(2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

ve

$$(4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/0 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

basit modüllerdir.

**Önerme 11.13.** *Sıfırdan farklı bir  $R$ -modül  $M$  bir kompozisyon serisine sahiptir ancak ve ancak  $M$  hem Artin hem de Noetherdir.*

*Kanıt.* Önce

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$$

bir kompozisyon serisi olsun. İspatı  $n$  üzerinde tümevarımla yapıyoruz.  $n = 1$  ise  $M$  basittir ve dolayısıyla hem Artinian hem Noetherian'dır.  $n > 1$  ise

$$M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$$

$M_1$  için bir kompozisyon serisidir; tümevarım varsayımından  $M_1$  Artin ve Noetherdir. Ayrıca,  $M/M_1$  basittir, dolayısıyla Artin ve Noetherdir. Altmodül ve bölüm modül önermesinden  $M$  de Artin ve Noether olur.

Tersine,  $M$  Artin ve Noether olsun. Noether olduğundan  $M$ 'nin maksimal bir altmodülü  $M_1$  vardır. Aynı şekilde  $M_1$ 'in maksimal bir altmodülü  $M_2$  vardır. Böylece,

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots$$

zinciri elde edilir ve her  $M_i, M_{i-1}$  içinde maksimaldir.  $M$  Artin olduğundan bu zincir sonlu adımda durur:

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0.$$

Dolayısıyla, bu bir kompozisyon serisidir. □

**Tanım 11.14.**

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$$

ve

$$M = N_0 \supsetneq N_1 \supsetneq \cdots \supsetneq N_m = 0$$

$M$ 'nin iki kompozisyon serisi olsun. Eğer  $m = n$  ve bir  $\sigma \in S_n$  permütasyonu için

$$M_{i-1}/M_i \cong N_{\sigma(i)-1}/N_{\sigma(i)}$$

her  $i = 1, \dots, n$  için sağlanıyorsa, bu iki kompozisyon serisine *denk* denir.

**Not 11.15.** Denk kompozisyon serilerinin uzunlukları aynıdır. Dolayısıyla, Jordan–Hölder Teoremi'nden, bir modülün tüm kompozisyon serilerinin aynı uzunluğa sahip olduğu sonucu elde edilir.

**Teorem 11.16** (Jordan–Hölder). *Bir  $R$ -modülünün herhangi iki kompozisyon serisi denktir. Başka bir deyişle, bir modülün kompozisyon serisi, faktörlerinin sıralaması dışında tek türlü belirlenir.*

**Tanım 11.17.** Kompozisyon serisine sahip bir  $R$ -modül  $M$  için, kompozisyon serilerinin ortak uzunluğuna  $M$ 'nin *uzunluğu* denir ve  $\ell(M)$  ile gösterilir.

**Teorem 11.18** (Hilbert Taban Teoremi). *Eğer  $R$  Noether bir halka ise,  $R[x]$  polinom halkası da Noetherdir. Daha genel olarak, her  $n \geq 1$  için  $R[x_1, \dots, x_n]$  halkası Noetherdir.*

## Beşin Gün Alıştırmaları

1. Eğer  $R$  sağ Artin bir halka ise,  $R[x]$  halkasının sağ Artin olmak zorunda mıdır? Açıklayınız.
2. Eğer  $R$  sağ Artin bir halka ve  $I$  bir ideali ise,  $R/I$  bölüm halkasının da sağ Artin midir? Açıklayınız.
3. Aşağıdaki önermenin doğru olup olmadığını belirleyiniz:  
 “Bir halka sağ Artindir (sağ Noetherdir) ancak ve ancak her sonlu üretilmiş sağ modül Artindir (Noetherdir).”  
 Doğru ise ispatlayınız, yanlış ise karşı örnek veriniz.
4.  $M$  bir Noether modül ve  $f : M \rightarrow M$  bir endomorfizma olsun.  $f$  örten ise birebir olduğunu gösteriniz.
5.  $M$  bir Artin modül ve  $f : M \rightarrow M$  bir endomorfizma olsun.  $f$  birebir ise örten olduğunu gösteriniz.

## Kaynaklar

1. Paul E. Bland, *Rings and Their Modules*, De Gruyter, 2011.

(Bu ders notlarının temel iskeleti büyük ölçüde bu kitaptaki modül teorisi sunumunu takip etmektedir. Özellikle serbest modüller, yarıbasit modüller, Artin-Noether modülleri ve Wedderburn–Artin teorisi için ana kaynak olarak kullanılmıştır.)

2. Alberto Facchini, *Introduction to Ring and Module Theory*, Birkhäuser, 2025.

(Modül teorisinin modern ve oldukça temiz bir sunumunu içermektedir. Özellikle yarıbasit modüller, Noether-Artin modülleri ve sonlu kompozisyon uzunluğu konularında yararlanılmıştır.)

3. David S. Dummit and Richard M. Foote, *Abstract Algebra*, 3rd Edition, Wiley, 2004.

(Temel halka ve modül teorisi, Çin Kalan Teoremi ve cebirsel örnekler için başvuru kaynağı olarak kullanılmıştır. Modül teorisi bölümü Bölüm 10'da yer almaktadır.)

4. I. Martin Isaacs, *Algebra: A Graduate Course*, Brooks/Cole, 1994.

(Özellikle halka teorisi ve modül teorisinin motivasyonu ile çeşitli cebirsel örnekler için yararlanılmıştır. Modüller ve Artin halkaları üzerine bölümler içermektedir.)