

On Primary and Tertiary Decomposition Theories

Evrin Akalan

Hacettepe University, Ankara, Turkey
eakalan@hacettepe.edu.tr

One of the central principles in mathematics is decomposition into prime building blocks. The Fundamental Theorem of Arithmetic asserts that every integer factors uniquely into prime powers. In commutative algebra, the Lasker-Noether theorem provides a structural analogue: every ideal in a Noetherian ring can be written as an intersection of primary ideals associated to prime ideals. Beyond the commutative setting, however, this philosophy becomes far more delicate. In noncommutative rings, primary decomposition may fail, and prime ideals no longer control structure in a straightforward way. These difficulties led to the development of tertiary decomposition theory, a weaker but more flexible framework that survives where primary decomposition does not. This talk surveys the evolution of primary and tertiary decomposition theories and examines how the prime factorization philosophy extends and where it fundamentally breaks down in noncommutative algebra.

Keywords. Noetherian ring, primary ideal, tertiary radical.

Birincil ve Üçüncül Ayrışım Teorileri Üzerine

Evrin Akalan

Hacettepe Üniversitesi, Ankara, Türkiye
eakalan@hacettepe.edu.tr

Matematiğin temel ilkelerinden biri, karmaşık yapıları asal yapı taşlarına ayırma fikridir. Aritmetiğin Temel Teoremi, her tam sayının asal kuvvetlerin çarpımı olarak tek biçimde ayrıştığını söyler. Komütatif cebirde ise Laskerâ-Noether teoremi bunun yapısal bir analogunu sunar: Noether bir halkadaki her ideal, asal ideallerle ilişkili birincil ideallerin kesişimi olarak yazılabilir. Ancak komütatif ortamın ötesine geçildiğinde bu yaklaşım çok daha hassas bir hal alır. Nonkomütatif halkalarda birincil ayrışım her zaman mümkün değildir ve asal idealler yapıyı artık doğrudan ve şeffaf bir biçimde kontrol etmez. Bu güçlükler, birincil ayrışımın başarısız olduğu durumlarda da geçerliliğini koruyan, daha zayıf fakat daha esnek bir çerçeve sunan üçüncül ayrışım teorisinin geliştirilmesine yol açmıştır. Bu konuşmada, birincil ve üçüncül ayrışım teorilerinin tarihsel gelişimini ele alacak ve asal çarpanlara ayırma düşüncesinin nonkomütatif cebirde ne ölçüde sürdürülebildiğini ve hangi noktalarda temelden kırıldığını inceleyeceğiz.

Anahtar Kelimeler. Noether halka, birincil ideal, üçüncül radikal.